ΜΑΘΗΜΑ 49
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5η ΔΕΚΑΔΑ

41.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g(x)=\int_1^{x+1}\left(\int_0^x xf(t)dt\right)(2t+1)dt$, $x\in\mathbb{R}$

i) Δείξτε ότι $g(x)=(x^3+3x^2)\int_0^x f(t)dt$

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-3,0)$ ώστε $3(\xi+2)\int_\xi^0 f(t)dt=\xi(\xi+3)f(\xi)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Θέτουμε $h(x)=\int_0^x xf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ **(1)**

Να θυμάστε αυτή τη διαδικασία

Η $g(x)$ γράφεται

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^{x+1} h(x)(2t+1)dt \\ &= h(x)\int_1^{x+1}(2t+1)dt \\ &= h(x)\left[t^2+t\right]_1^{x+1} \\ &= h(x)\,[(x+1)^2+x+1-(1+1)] \\ &= h(x)\,(x^2+3x) \\ &\overset{(1)}{=} x\int_0^x f(t)dt\cdot(x^2+3x) \\ &= (x^3+3x^2)\int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

ii)

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (πράξεις παραγωγίσιμων), άρα παραγωγίσιμη και στο $[-3,\ 0]$

Ακόμα είναι $g(-3)=0=g(0)$.

Οπότε για την g ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-3,\ 0]$.
Θα υπάρχει, λοιπόν, ένα τουλάχιστον $\xi\in(-3,\ 0)$ ώστε $g'(\xi)=0$ **(2)**

Όμως (i) $\Rightarrow$ $g'(x)=(x^3+3x^2)'\int_0^x f(t)dt + (x^3+3x^2)\left(\int_0^x f(t)dt\right)'$

$$= (3x^2+6x)\int_0^x f(t)dt + (x^3+3x^2)\,f(x)$$

(2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &(3\xi^2+6\xi)\int_0^\xi f(t)dt+(\xi^3+3\xi^2)\,f(\xi)=0 \\ &\xi(3\xi+6)\int_0^\xi f(t)dt+\xi(\xi^2+3\xi)\,f(\xi)=0 \\ &-3\xi(\xi+2)\int_0^\xi f(t)dt = \xi^2(\xi+3)\,f(\xi) \\ &3(\xi+2)\int_\xi^0 f(t)dt = \xi(\xi+3)\,f(\xi) \end{aligned}$$

Σε δύσκολες ασκήσεις εφαρμόστε Rolle ή Θ.Μ.Τ τυφλά.

42.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $(f \circ f)(x) + x = 0$. Δείξτε ότι

i) Είναι “1—1”

ii) Δεν είναι μονότονη

iii) Είναι περιττή

iv) $f(0) = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η υπόθεση γίνεται $(f \circ f)(x) = -x \Leftrightarrow f(f(x)) = -x$. **(1)**

Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$-x_1 = -x_2 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2$$

Θυμήσου τον ορισμό της “1 – 1“

Άρα η f είναι “1–1”

ii)

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$

$$f(f(x_1)) < f(fx_2))$$

$$-x_1 < -x_2 \Rightarrow x_1 > x_2 \quad \text{άτοπο}$$

Άρα η f δεν είναι γνησίως αύξουσα .

Ομοίως και για γνησίως φθίνουσα ή σταθερή .

iii)

$f(f(x)) = -x$ **(2)**

Στη (2) θέτουμε όπου x το f(x), τότε $f(f(f(x))) = -f(x)$ **(3)**

Επίσης από την (2) προκύπτει ότι $f(f(f(x))) = f(-x)$ **(4)**

Από τις (3), (4) $\Rightarrow$ $f(-x) = -f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

iv)

Η $f(-x) = -f(x)$ για $x = 0 \Rightarrow f(0) = -f(0)$

$$2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

43.

Έστω f, g, h τρείς συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $(gof)(x) = (hog)(x) = x$. Δείξτε ότι

i) Η g είναι "1—1"

ii) Το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$

iii) $g^{-1}(x) = f(x) = h(x)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η υπόθεση γίνεται $g(f(x)) = x$ **(1)** και $h(g(x)) = x$ **(2)**

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow h(g(x_1)) = h(g(x_2)) \overset{(2)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

Άρα η g είναι "1—1"

ii)

Έστω α τυχαίος πραγματικός αριθμός. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός β έτσι, ώστε να ισχύει $g(\beta) = \alpha$.

Η (1) για $x = \alpha$ δίνει $g(f(\alpha)) = \alpha$
Επομένως ο ζητούμενος β είναι ο $f(\alpha)$

iii)

Επειδή η g είναι "1—1" και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η g αντιστρέφεται με $g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Η (1) $g(f(x)) = x \Rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$

Στη (2) θέτουμε όπου x το $g^{-1}(x)$: $h(g(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) \Rightarrow$

$$h(x) = g^{-1}(x)$$

44.

Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(-2, 15)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha f(x-2) + \beta f(1-x) = 5(x^2 - 4x + 9)$

i) Να βρείτε τα α και β

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού η C_f διέρχεται από τα Α και Β θα είναι $f(1) = 0$ και $f(-2) = 15$

Η υπόθεση για $x = 3$ δίνει $\alpha f(1) + \beta f(-2) = 30$

$\alpha . 0 + \beta . 15 = 30$

$\beta = 2$

και για $x = 0$ δίνει $\alpha f(-2) + \beta f(1) = 45$

$\alpha . 15 + \beta . 0 = 45$

$\alpha = 3$

ii)

Για $\alpha = 3$ και $\beta = 2$ η υπόθεση γίνεται $3f(x-2) + 2f(1-x) = 5(x^2 - 4x + 9)$ **(1)**

Στην (1) θέτουμε $x - 2 = y$, οπότε $x = y + 2$

και $1 - x = 1 - (y + 2) = 1 - y - 2 = -1 - y$

Οπότε $3f(y) + 2f(1-x) = 5[(y+2)^2 - 4(y+2) + 9] = \ldots\ldots\ldots = 5(y^2 + 5)$ **(2)**

Στην (1) θέτουμε $1 - x = u$, οπότε $x = 1 - u$

και $x - 2 = 1 - u - 2 = -1 - u$

Οπότε $3f(-1-u) + 2f(u) = 5[(1-u)^2 - 4(1-u) + 9] = \ldots\ldots = 5(y^2 + 2y + 6)$ **(3)**

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε $f(y) = y^2 - 4y + 3$

Άρα $f(x) = x^2 - 4x + 3$

45.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^2(x)+xf(x)-1=0$ και $f(0)=-1$.

i) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

iii) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Προτεινόμενη λύση

i)

Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, αφού αυτή είναι συνεχής, με το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Η υπόθεση για $x=x_o$ δίνει $f^2(x_o)+x_of(x_o)-1=0 \Rightarrow -1=0$ άτοπο.

ii)

Βλέπουμε την υπόθεση σαν εξίσωση δεύτερου βαθμού με άγνωστο το $f(x)$.

Λύνοντάς την βρίσκουμε $f(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ ή $f(x)=\dfrac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2}$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=\dfrac{-0+\sqrt{0^2+4}}{2}$ ή $f(0)=\dfrac{-0-\sqrt{0^2+4}}{2}$

$-1=1$ (άτοπο) ή $-1=-1$

Άρα δεκτός τύπος είναι ο $f(x)=\dfrac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2}$

iii)

$$f'(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\frac{-\sqrt{x^2+4}-x}{2\sqrt{x^2+4}}\overset{*}{<}0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(1)}$$

* Αρκεί να αποδείξουμε ότι $-\sqrt{x^2+4}-x<0$

ή $\sqrt{x^2+4}>-x$ **(2)**

Όταν $x\geq 0$, η (2) είναι προφανής (1^o μέλος θετικό και 2^o μέλος ≤ 0)

Όταν $x<0$, από την (2) αρκεί να αποδείξουμε $x^2+4>(-x)^2$

$x^2+4>x^2$ που ισχύει

(1) $\Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα

iv)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2}=(+\infty)-(+\infty)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x-\sqrt{x^2+4})(-x+\sqrt{x^2+4})}{2(-x+\sqrt{x^2+4})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-4}{2(-x+\sqrt{x^2+4})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{2(-x+\sqrt{x^2+4})}=\left(\frac{-4}{+\infty}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2}=\frac{-(+\infty)-(+\infty)}{2}=-\infty.$$ Οπότε $f(A)=(-\infty,\ 0)$

46.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$, όπου $m>0$

i) Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το m

ii) Αν $m=10$, να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Προτεινόμενη λύση

Με το Θ.Fermat, από ανισότητα συμπεραί – νουμε ισότητα

i)

$f(0)=2^0+m^0-4^0-5^0=1+1-1-1=0$

Οπότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq f(0)$

Δηλαδή στο εσωτερικό σημείο 0 του $\mathbb{R}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με βάση το θεώρημα του Fermat,

θα έχουμε $f'(0)=0$. **(1)**

$$f'(x)=2^x\ln2+m^x\ln m-4^x\ln4-5^x\ln5 \Rightarrow f'(0)=2^0\ln2+m^0\ln m-4^0\ln4-5^0\ln5$$

$$=\ln2+\ln m-\ln4-\ln5$$

$$=\ln\frac{2m}{4\cdot5}$$

$$=\ln\frac{m}{10}$$

$$(1)\Rightarrow \ln\frac{m}{10}=0 \Rightarrow \frac{m}{10}=1 \Rightarrow m=10$$

ii)

Για $m=10$ είναι $f(x)=2^x+10^x-4^x-5^x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2^x+10^x-4^x-5^x)=0+0-0-0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2^x+10^x-4^x-5^x)=\cancel{(+\infty)-(+\infty)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[10^x\left(\left(\frac{2}{10}\right)^x+1-\left(\frac{4}{10}\right)^x-\left(\frac{5}{10}\right)^x\right)\right]$$

$$\overset{*}{=}(+\infty)(0+1-0-0)=+\infty$$

$$*\ \lim_{x\to+\infty}10^x=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{10}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{10}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{10}\right)^x=0$$

(οι βάσεις είναι μεταξύ 0 και 1)

47.

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 2$ και

$$f'(x) - f(x) = -4e^{-3x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή

ii) Να βρείτε τον τύπο της f

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η h.

$$\begin{aligned} h'(x) &= -e^{-x} f(x) + f'(x)\, e^{-x} + 4e^{-4x} \\ &= -e^{-x} f(x) + (f(x) - 4e^{-3x})\, e^{-x} + 4e^{-4x} \\ &= -e^{-x} f(x) + f(x)\, e^{-x} - 4e^{-3x}e^{-x} + 4e^{-4x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα $h(x) = c$ στο $\mathbb{R}$

ii)

$$h(x) = c \iff e^{-x} f(x) - e^{-4x} = c \qquad \textbf{(1)}$$

Για $x = 0$ η (1) $\Rightarrow$ $e^{0} f(0) - e^{0} = c$

$$f(0) - 1 = c$$

$$2 - 1 = c \Rightarrow c = 1$$

Η (1) γίνεται $e^{-x} f(x) - e^{-4x} = 1 \iff e^{-x} f(x) = 1 + e^{-4x}$

$$f(x) = e^{x} + e^{-3x}$$

48.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^{x}, & \text{αν } x \le 0 \\ x\ln x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x = 0$

ii) Αν $\alpha = -1$, να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

iii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ **(1)**

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\alpha + e^{x}) = \alpha + 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \cancel{0(-\infty)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \cancel{\frac{-\infty}{+\infty}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$f(0) = \alpha + e^{0} = \alpha + 1$$

$$(1) \iff \alpha + 1 = 0 \iff \alpha = -1$$

ii)

Για $\alpha = -1$ η f γίνεται $\quad f(x) = \begin{cases} -1 + e^x & \text{αν } x \le 0 \\ x\ln x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1 + e^x - 0}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο $x = 0$

iii)

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{αν } x < 0 \\ 1 + \ln x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1}$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		e^{-1}		$+\infty$
f'		+	‖	−	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

iv)

Λόγω των ευθειών $x = 1$ και $x = e$, το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[1,\ e]$.
Από τον τύπο της f, είναι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [1,\ e]$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\quad E = \int_1^e x\ln x\,dx$

$$= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

.

49.

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $(0, +\infty)$, α και $\beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$,
$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$ και $g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x \in (0, +\infty)$. Δείξτε ότι :

i) Η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σ' ένα τουλάχιστον σημείο $x_1 \in (0, +\infty)$

ii) $g(x_1) = 2 + f(x_1)$

Προτεινόμενη λύση

> Για ιδιότητα της παραγώγου υποψιαζόμαστε Θ. Rolle ή Θ.Μ.Τ

i)

f συνεχής στο $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ η $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$,
οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$,
άρα και στο $[\alpha, \beta]$

Είναι $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2$ και $g(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 2 + \frac{1}{\beta}\cdot 0 = 2$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\alpha, \beta) \subseteq (0, +\infty)$ ώστε $g'(x_1) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι στο σημείο $(x_1, g(x_1))$ η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη .

ii)

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt \Rightarrow$

$$xg(x) = 2x + \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$

$$(xg(x))' = \left(2x + \int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'$$

$$g(x) + xg'(x) = 2 + f(x) \quad \text{και για } x = x_1$$

$$g(x_1) + x_1 g'(x_1) = 2 + f(x_1)$$

$$g(x_1) + 0 = 2 + f(x_1)$$

$$g(x_1) = 2 + f(x_1)$$

50.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) < f(\beta)$ και την f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Δείξτε ότι :

i) Υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

ii) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2\frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}$

iii) Για το x_o του ερωτήματος (i) είναι $x_o > \frac{\alpha + \beta}{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θεωρούμε τ η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, $x \in [\alpha,\ \beta]$

Η h είναι προφανώς συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ με $h(\alpha) = f(\alpha) - \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

$$= \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{2}$$

και $h(\beta) = f(\beta) - \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

$$= \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2}$$

Οπότε $h(\alpha)h(\beta) = -\dfrac{\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)^2}{4} < 0$

Επομένως για την h ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[\alpha,\ \beta]$,
οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h(x_o) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(x_o) - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} = 0$$

$$f(x_o) = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

> Για την ύπαρξη δύο σημείων
> απαιτούνται δύο διαστήματα

ii)

Η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[\alpha,\ x_o]$, $[x_o,\ \beta]$
και παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,\ x_o)$, $(x_o,\ \beta)$
Άρα, για την f σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, ισχύει το Θ.Μ.Τ,
οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_o)$ και $x_2 \in (x_o, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_o)-f(\alpha)}{x_o-\alpha} = \frac{\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - f(\alpha)}{x_o-\alpha} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(x_o-\alpha)} \neq 0 \text{ αφού } f(\alpha) < f(\beta)$$

$$f'(x_2) = \frac{f(\beta)-f(x_o)}{\beta-x_o} = \frac{f(\beta) - \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}}{\beta-x_o} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(\beta-x_o)} \neq 0.$$

Άρα $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = \dfrac{2(x_o-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)} + \dfrac{2(\beta-x_o)}{f(\beta)-f(\alpha)} = \dfrac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$

iii)

$x_1 < x_2$ και f' γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ $f'(x_1) < f'(x_2)$

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(x_o-\alpha)} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(\beta-x_o)}$$

$$\frac{1}{x_o-\alpha} < \frac{1}{\beta-x_o}$$

και αφού $x_o - \alpha > 0$, $\beta - x_o > 0$ $\quad \beta - x_o < x_o - \alpha$

$$\beta + \alpha < 2x_o$$

$$x_o > \frac{\alpha+\beta}{2}$$